Verax
consultoria

Função: **operações**
Segmento: **indústria**
Tema: **gestão de risco**
Metodologia: **análise quantitativa**

DETERMINAÇÃO DO NÚMERO ÓTIMO DE CLASSIFICAÇÕES IMPERFEITAS NA AVALIAÇÃO DA CONFORMIDADE DE PRODUTOS

Apresenta metodologia que permite considerar erros de inspeção em processos que utilizam tal atividade. Consideram-se os custos / riscos de errar e sugere-se o melhor curso de ação quando o erro de avaliação é uma parte inerente do processo de produção.

RESUMO

Neste trabalho estudamos o número ótimo de classificações independentes por unidade produzida supondo que haja dois tipos de erro: o tipo I no qual classifica-se um produto como não-conforme quando ele na realidade é conforme e o tipo II no qual classifica-se um produto como conforme quando na realidade é não-conforme. Desenvolvemos um modelo econômico para minimizar o custo médio total em função dos erros de classificação e do custo de cada classificação. Pela complexidade da função-objetivo associada ao modelo, utilizamos um procedimento exaustivo de busca juntamente com um limitante superior do valor ótimo. Todo o procedimento computacional teve uma implantação relativamente simples e está disponível como uma planilha eletrônica do Excel e um código do software estatístico Minitab.

1 INTRODUÇÃO

Testes para verificação da qualidade por atributos constituem parte importante da maioria dos processos produtivos. São primordiais especialmente quando os processos apresentam características de incontrolabilidade ou o produto final é composto de diversos componentes. Como exemplo de processos onde sempre há verificação de atributos, podemos citar a pintura de automóveis, a manufatura de circuitos integrados, a fabricação de discos rígidos para computador e o teste de conjuntos montados como veículos e autopeças.

Os testes de qualidade constituem-se da classificação de cada produto fabricado em conforme ou não-conforme. Estes são normalmente realizados supondo que o sistema de classificação é perfeito, apesar de nem sempre podermos considerar essa hipótese como verdadeira. Além disso, estamos supondo que as classificações não são destrutivas.

BURKE *et al.* (1995) e GRAMOPADHYE *et al.* (1996) argumentam que os erros estão longe de serem considerados desprezíveis em muitas tarefas de classificação e podem comprometer seriamente o processo de avaliação da qualidade de atributos. JOHNSON, KOTZ & WU (1991) apresentam numerosos estudos onde verificam que os erros de classificação influenciam seriamente o processo da avaliação da qualidade por atributos.

Neste trabalho tratamos de testes cujas classificações podem apresentar erros. Estamos considerando que dois tipos de erros são possíveis: um é o erro de classificação tipo I no qual classifica-se um produto como não-conforme sendo na realidade conforme; outro é o erro de classificação tipo II no qual classifica-se um produto como conforme sendo na realidade não-conforme. Dessa forma, os testes podem indicar um falso controle da qualidade dos atributos. A questão aqui será de como melhorar o desempenho dos testes de qualidade através da diminuição da influência dos erros de classificação.

Uma estratégia que propomos para resolver o problema apresentado é realizar m ($m \geq 0$ e inteiro) classificações independentes por produto fabricado e considerar como classificação final do produto a maioria dos resultados obtidos. Tal procedimento, apesar de intuitivo, pode ser inviável economicamente. Essa inviabilidade, conforme veremos adiante, vai depender de uma ponderação entre quanto custa cada classificação, cada envio de produto não-conforme para o mercado e cada produto julgado erroneamente não-conforme. Sendo assim, há necessidade de um modelo que indique qual o número ótimo de classificações independentes repetidas no sentido econômico.

GREENBERG & STOKES (1995) apresentam um modelo particular, onde determinam o número ótimo de classificações repetidas considerando apenas a presença do erro tipo I. A hipótese do modelo implica que o "comprador" só recebe produtos conformes e a preocupação da empresa é focada em diminuir o número de produtos julgados não-conformes erradamente. Consideramos que esta premissa não é válida para a maioria dos processos produtivos uma vez que o erro tipo II é motivo das usuais reclamações dos "compradores" e sua magnitude é considerado como diferencial importante na seleção de empresa. Neste trabalho apresentamos um modelo para determinação do número ótimo de classificações repetidas independentes dos produtos fabricados, considerando a possibilidade dos erros tipo I e tipo II, e que, além disso, pode ser facilmente implantado na prática.

O restante do trabalho é dividido em três seções. A seção 2 descreve o modelo probabilístico adequado. Na seção 3, discutimos o modelo de custo para determinação do número de classificações repetidas independentes e derivamos um limitante superior para determinação do número ótimo de classificações repetidas. Uma aplicação numérica com implantação computacional do modelo proposto é apresentada na seção 4. Finalizamos o trabalho com algumas discussões que podem ser relevantes para novas aplicações e trabalhos futuros.

2 MODELO PROBABILÍSTICO

Considere uma classificação de n produtos em conformes e não-conformes. Seja p a probabilidade de que um produto qualquer seja fabricado conforme, e_1 a probabilidade de que um produto conforme seja classificado como não-conforme em uma única classificação e e_2 a probabilidade de que um produto não-conforme seja classificado como conforme em uma única classificação. A Figura 1 mostra uma árvore de eventos para facilitar a visualização destas probabilidades.

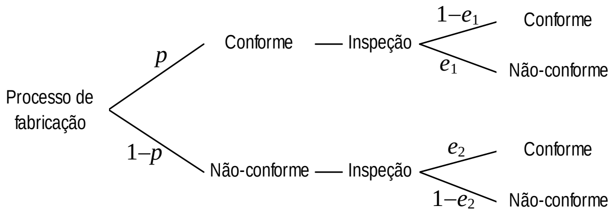


Figura 1: árvore de eventos das probabilidades consideradas

Suponha que cada um dos n produtos seja classificado independentemente m vezes. Considere C_{ij} $(i = 1,\dots,n;\ j = 1,\dots,m)$ como uma variável 0-1, correspondente ao ij-ésimo evento, isto é, a j-ésima classificação do i-ésimo produto; C_i também uma variável 0-1, correspondente à classificação final do i-ésimo produto após as m classificações independentes. Por exemplo, $C_{23} = 1$ significa que na terceira classificação independente o produto 2 foi considerado conforme e $C_3 = 1$ significa que o produto 3 foi considerado conforme após as m classificações independentes. Observe a tabela 1 para uma melhor visualização.

Neste ambiente, estaremos considerando que o i-ésimo produto será julgado conforme, $C_i = 1$, se e somente se

$$\sum_{j=1}^{m} C_{ij} > 0{,}5m \; (i = 1, \dots, n)$$

Caso contrário será julgado não-conforme $(C_i = 0)$ Observe que em caso de empates nas classificações repetidas, possível quando m é par, o critério de decisão favorece o "comprador" evitando o erro tipo II considerado neste trabalho, em termos de custos, mais sério que o erro tipo I.

$$\Pr[C_i = 1] = \Pr\left[\sum_{j=1}^{m} C_{ij} > 0{,}5m\right] (i = 1, \dots, n)$$

(2.1)

Tabela 1: classificação de n produtos, m vezes cada

Produto	Classificações (C_{ij})					Classificação final (C_i)
	1	2	3	...	m	
1	C_{11}	C_{12}	C_{13}	...	C_{1m}	C_1
2	C_{21}	C_{22}	C_{23}	...	C_{2m}	C_2
3	C_{31}	C_{32}	C_{33}	...	C_{3m}	C_3
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
n	C_{n1}	C_{n2}	C_{n3}	...	C_{nm}	C_n

Suporemos que os resultados tipo Bernoulli C_i são independentes e identicamente distribuídos. Definindo E_i (i=1,...,n) como uma variável 0-1, correspondente ao estado real de fabricação do i-ésimo produto e utilizando o teorema da probabilidade total podemos expressar Pr[C_i=1] da seguinte forma:

$$\Pr[C_i=1]=\Pr[E_i=1]\Pr[C_i=1/E_i=1]+\Pr[E_i=0]\Pr[C_i=1/E_i=0]$$
$$=p\left[1-\sum_{x=0}^{\lfloor 0{,}5m\rfloor}\binom{m}{x}(1-e_1)^x e_1^{m-x}\right]+(1-p)\left[1-\sum_{x=0}^{\lfloor 0{,}5m\rfloor}\binom{m}{x}e_2^{\,x}(1-e_2)^{m-x}\right]$$

onde o termo Pr[a/b] indica a probabilidade condicional de a dado b e $l=\lfloor 0{,}5m\rfloor$ indica o menor inteiro inferior ou igual a 0,5m.

Utilizando a notação $B[a;b;c]$ para uma Função Distribuição Binomial, com parâmetros a e b, calculada no ponto l, temos

$$\Pr[C_i=1]=p(1-B[m;e_1;l])+(1-p)(1-B[m;e_2;l])$$
(2.2)

Para situações reais é razoável assumir que $e_1<0{,}5$ e $e_2<0{,}5$. Assim sendo, o crescimento de m faz decrescer a probabilidade de julgamentos equivocados sobre a conformidade ou não dos produtos. Neste sentido, com o aumento de m, o número de produtos considerados conformes converge para a proporção de produtos fabricados conformes, como podemos observar na proposição 1.

Proposição 1. Com o aumento de m, o número de produtos classificados conformes converge para a proporção de produtos fabricados conformes.

Demonstração. A demonstração pode ser realizada através da aproximação da distribuição Binomial pela distribuição Normal. Assim, temos:

$$\lim_{m\to+\infty}\Pr[C_i=1]=p-p\Phi\left[\frac{l-m(1-e_1)}{\sqrt{me_1(1-e_1)}}\right]+(1-p)\left(1-\Phi\left[\frac{(l-me_2)}{\sqrt{me_2(1-e_2)}}\right]\right)$$
$$=p-p\Phi[-\infty]+(1-p)(1-\Phi[+\infty])=p$$

onde $\Phi[\cdot]$ indica função distribuição Normal padrão.

□

3 MODELO PARA MINIMIZAÇÃO DE CUSTOS

Consideremos c_0 o custo de classificar um produto uma única vez, c_1 o custo de erroneamente julgar um produto conforme como não-conforme e c_2 o custo de julgar erroneamente um produto não-conforme como conforme. Se não houver classificações (m=0), o custo médio total (E_m) será definido como

$$E_m(p,e_1,e_2)=n(1-p)c_2\text{, } m\text{=0.} \qquad (2.3)$$

Em última análise, estamos considerando que toda a produção é conforme e por conseqüência somente o erro tipo II pode estar presente. O número médio de produtos não-conformes no mercado será $n(1-p)$.

Já para n produtos, cada um classificado m vezes (m≥1 e inteiro), podemos expressar o custo médio total (E_m) como

$$E_m(p,e_1,e_2)=nmc_0+n\Pr[E_i{=}1]\Pr[C_i=0/E_i=1]c_1+n\Pr[E_i{=}0]\Pr[C_i=1/E_i=0]c_2$$
$$=nmc_0+npB[m;(1\text{-}e_1);l]c_1+n(1-p)(1-B[m;e_2;l])c_2,\ m\geq 1$$
(2.4)

onde $B[m;(1-e_1);l]=F_1$ representa a probabilidade de considerar erroneamente um produto conforme como não-conforme e $1-B[m;e_2;l]=F_2$ representa a probabilidade de considerar um produto não-conforme como conforme.

Vamos supor que m° seja o m ótimo e que os m válidos pertençam ao conjunto dos inteiros positivos (**Z**$^+$=0,1,...).

O problema que estamos considerando se reduz a determinar o m° que satisfaça a equação (2.5) ou semanticamente, o m° cujo custo médio total (E_m) seja mínimo, considerando todos os m válidos. Podemos observar que o valor de m° independe de n.

$$m^{\circ} = arg \min_{m \in Z^+} \{E_m(p, e_1, e_2)\}$$
(2.5)

Em termos operacionais, primeiramente encontramos o $m^* \geq 1$ que minimiza (2.4). Em seguida comparamos $\min E_{m\geq 1}(p, e_1, e_2)$ com $E_{m=0}(p, e_1, e_2)$. Se $\min E_{m\geq 1}(p, e_1, e_2)$ for maior ou igual a $E_{m=0}(p, e_1, e_2)$ então $m^{\circ} = 0$. Caso contrário $m^{\circ} = m^*$. Sendo assim, a grande dificuldade está centrada em se determinar m^*. Nos desenvolvimentos que se seguem, reduziremos o número de candidatos aptos para m^*, gerando conseqüentemente condições para determinar m°.

Para probabilidade de erros de inspeção muito pequenas, não é interessante haver inspeções repetidas. Embora intuitivamente correto, fornecemos a prova abaixo mostrando a validade de nosso modelo.

Proposição 2. Se as probabilidades dos erros de inspeção são muito pequenas, ou seja, e_1,e_2→0, então $m^* = 1$.

Demonstração. Como $E_m(p, e_1, e_2) - E^*_m(p, e_1, e_2) \geq 0$ e 0≤F_1,F_2≤1, utilizando (2.4) podemos encontrar que $c_0(m - m^*) \geq 0$, e por conseqüência, o único m^* que satisfaz a equação é $m^* = 1$. □

A princípio, desejaríamos encontrar uma forma analítica para *m* que satisfizesse a equação (2.5) e fosse facilmente implementável computacionalmente. Tentamos utilizar diversos procedimentos convencionais de otimização entretanto sem sucesso. Em grande parte, a dificuldade acontece devido `a equação (2.5) ser definida para valores inteiros m. Além disso, o limite do somatório presente nos cálculos de F_1 e F_2 é função de m.

Uma solução possível seria escrever F_1 e F_2 como uma função beta incompleta. Tal procedimento provocaria a necessidade de técnicas de cálculo numérico sofisticadas com a conseqüente dificuldade de implantação computacional. Tudo isto nos levou a tentarmos desenvolver procedimentos exaustivos de busca para a localização do m que minimizasse a equação (2.4) e possibilitasse uma implantação computacional simples. Por sua característica intrínseca, os procedimentos exaustivos devem trabalhar juntamente com limitantes, fazendo com que a busca se processe em um intervalo finito de pontos.

Diversos limitantes são possíveis de serem gerados, dependendo das hipóteses assumidas com relação ao modelo e seus parâmetros. A proposição 3 abaixo fornece um limitante bastante aberto, no sentido de que poucas hipóteses foram consideradas na sua elaboração.

Proposição 3. Suponha que m^* é o m que minimiza (2.4). Um limitante superior pode ser definido como

$$m^* \leq 1 + (pc_1 + (1-p)c_2)/c_0 \qquad (2.5)$$

Demonstração. Pelo exame de $E_m(p, e_1, e_2) - E^*_m(p, e_1, e_2) \geq 0$, e após algumas manipulações algébricas com a equação (2.4), podemos obter $m^* \leq m + (pF_1c_1 + (1-p)F_2c_2) - pF^*_1c_1 - (1-p)F^*_2c_2)/c_0$. Considerando que $0 \leq F_1, F_2 \leq 1$, podemos chegar a $m^* \leq 1 + (pc_1 + (1-p)c_2)/c_0$. □

Das expressões (2.3), (2.4) e (2.5) podemos elaborar uma seqüência de tomada de decisão. Se $pc_1 + (1-p)c_2 < c_0$ e $c_0 > (1-p)c_2$ então $m^{\circ} = 0$. Se $pc_1 + (1-p)c_2) < c_0$ e $c_0 \geq (1-p)c_2$ então $m^{\circ} = 1$. Agora, se $pc_1 + (1-p)c_2 \geq c_0$ devemos calcular $E_m(p, e_1, e_2)$ para todos os valores de m com a restrição de que $m \leq 1 + (pc_1 + (1-p)c_2)/c_0$. Para um melhor entendimento mostramos na figura 2 o fluxograma do processo de tomada de decisão.

4 APLICAÇÃO NUMÉRICA

O exemplo descrito a seguir foi baseado em GREENBERG & STOKES (1995). Considere uma empresa que fabrica 1000 Circuitos Integrados (CI) por dia. Toda a produção é testada e cada CI é classificado como conforme ou não-conforme. Sabe-se, através de experiências práticas, que a classificação de CI pode apresentar erros.

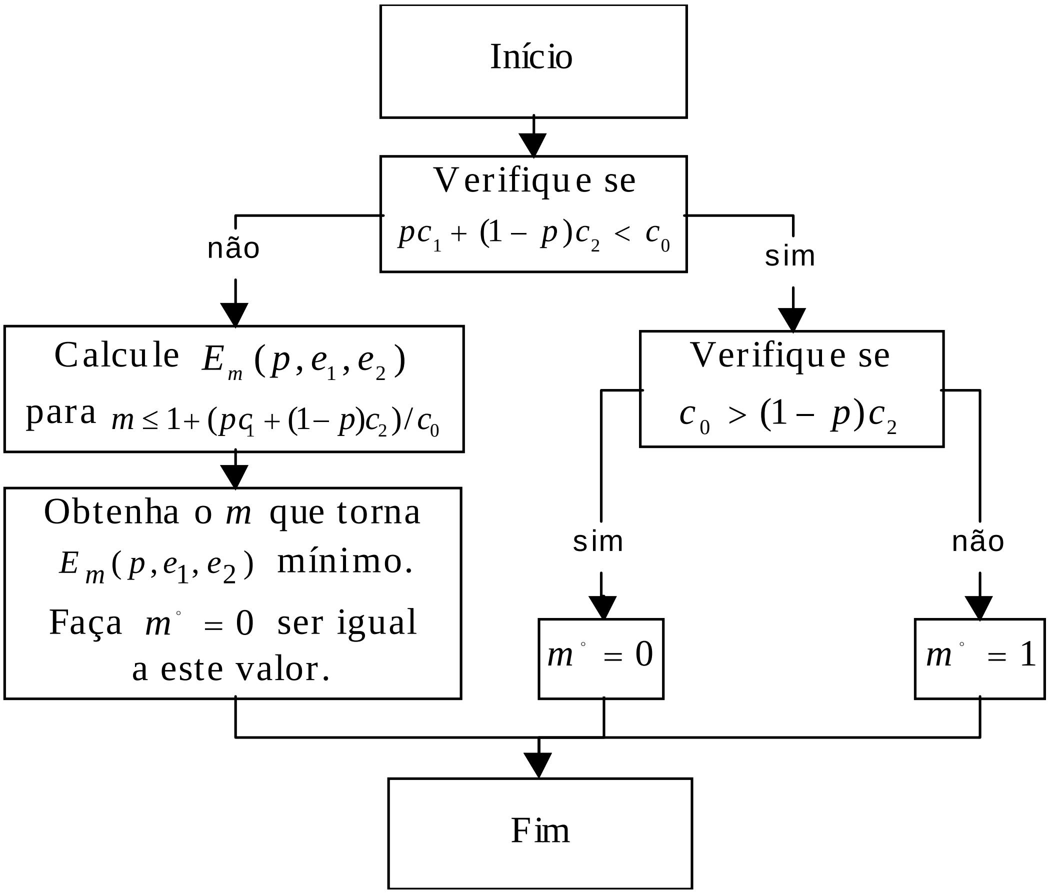


figura 2: fluxograma do processo de decisão

Seja $p = 0{,}95$ a probabilidade de que um CI seja fabricado conforme, $e_1 = 0{,}1$ a probabilidade de que um CI conforme seja classificado como não-conforme em uma única classificação e $e_2 = 0{,}1$ a probabilidade de que um circuito integrado não-conforme seja classificado como conforme em uma única classificação.

Os responsáveis pelo setor de planejamento e produção consideram primordial determinar o número ideal de classificações repetidas independentes (m) para os circuitos integrados como forma de minimizar o custo médio total da produção diária. Para tanto, consideram $c_0 = \$\,1{,}00$, $c_1 = \$80{,}00$ e $c_2 = \$120{,}00$.

Para o cálculo de m° realizamos implantação computacional no Excel e no *software* estatístico Minitab. A implantação no Excel é relativamente fácil e não necessita conhecimentos profundos. A figura 4 do anexo 1 mostra o leiaute da planilha utilizada. A implantação no Minitab foi realizada através da elaboração de um programa cujo resultado final é o valor de m°. A figura 5 do anexo 2 descreve o programa e sua utilização.

A utilização do Excel e/ou do Minitab forneceu o limitante $m^{\circ} \leq 83$ gerando o m ótimo (m°) igual a 3. O custo médio total foi de \$5296,00. Observe que o procedimento tradicional de classificar somente uma única vez produz um custo médio total de \$9200,00. A figura 3 mostra o comportamento de $E_m(p, e_1, e_2), m \geq 0$. A tendência observada na figura 2 continua para valores de m superiores a 19.

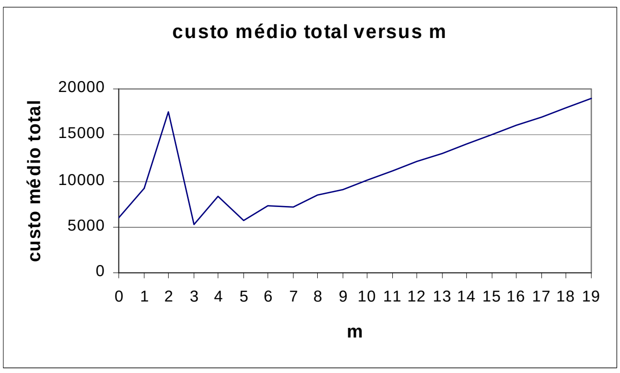


figura 3: Custo médio total versus *m*

5 CONCLUSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em controle por atributos, os erros de classificação podem causar um significativo impacto nas conclusões sobre a qualidade do processo de produção e conseqüentemente aumentar o custo médio total de todo o processo. Como forma de contornar o problema, sugerimos realizar, independentemente, mais de uma classificação por produto fabricado considerando como classificação final do produto a maioria dos resultados obtidos. Tal procedimento mostrou-se capaz de gerar economias sensíveis.

Para tanto, construímos um modelo de minimização dos custos envolvidos. Este mostrou-nos ser bastante adequado. Além de ser interpretável, possibilitou a determinação de um limitante para o valor que minimiza o custo médio total. Constatamos que todo o processo computacional pode ser resolvido através de implementação computacional simples e com isso tornar-se uma alternativa operacional e padronizada para o processo de produção.

As possibilidades de derivações deste trabalho são muitas. Primeiramente podemos generalizá-lo para o caso de atributos múltiplos. Em segundo lugar o critério de classificação final dos produtos fabricados pode ser ampliado para

$$\sum_{j=1}^{m} C_{ij} > am\,, i = 1, \dots, n \text{ e } 0 \leq a \leq 1.$$

Isto gera uma nova função-objetivo para o custo médio total e torna desnecessárias as hipóteses $e_1 < 0{,}5$ e $e_2 < 0{,}5$. Neste sentido, a minimização do custo médio total dependerá de m e a. Finalmente podemos considerar $p, e_1, \text{e } e_2$ desconhecidos e tratá-los via processo inferencial. Neste sentido, podemos considerar a estatística bayesiana a postura mais adequada. GABA & WINKLER (1992) apresentam uma inferência bayesiana dos parâmetros $p, e_1, \text{e } e_2$.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BURKE, J. R. *et al.***:** "The effect of inspector errors on the true fraction non-conforming: an industrial experiment", *Quality Engineering*, 7, pp. 543-550, 1995.

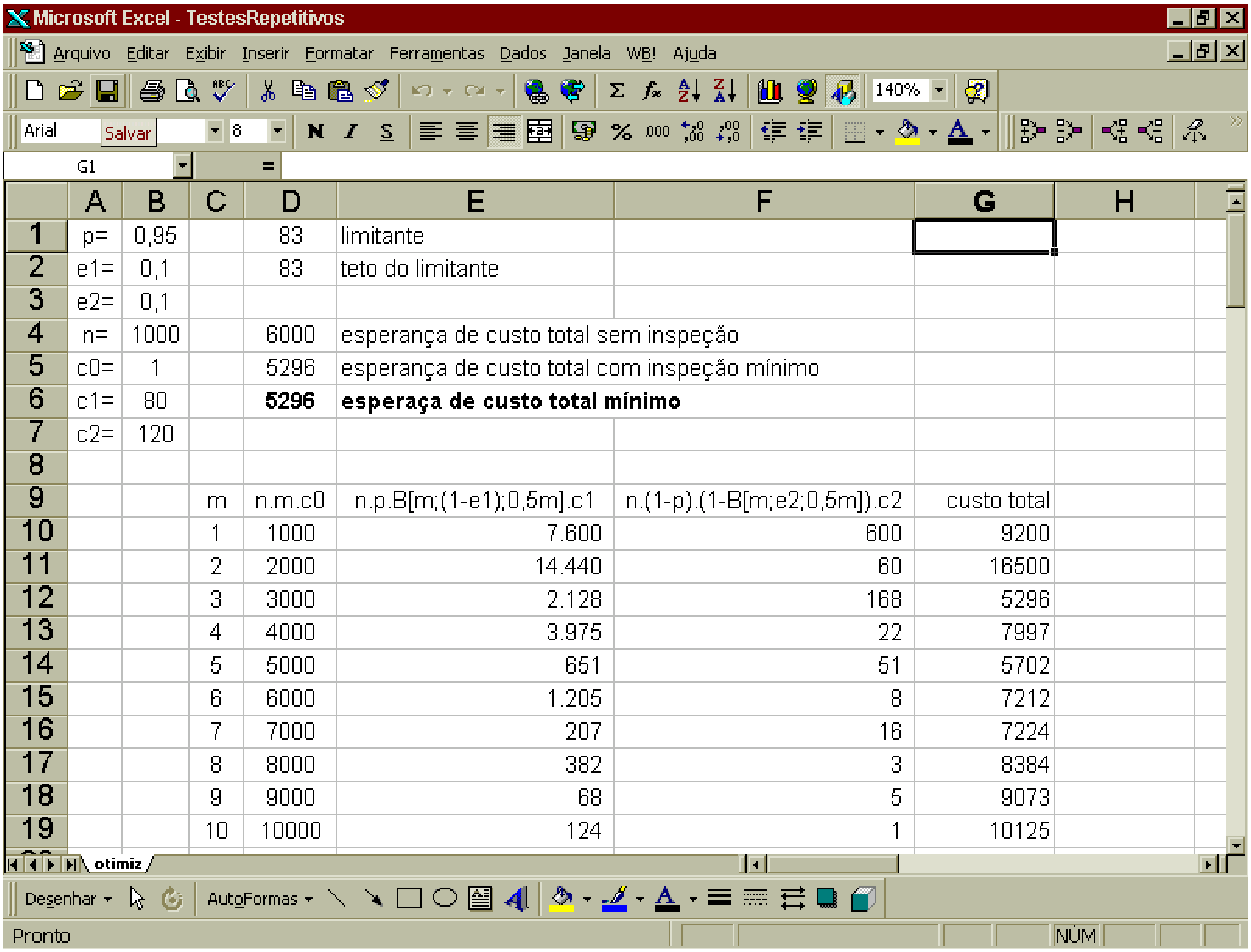
GRAMOPADHYE, A. K. *et al.***:** "Compensating for Inspection Errors in Attribute Inspection", *Quality Engineering*, 8(2), p.311-22, 1995-96.

GREENBERG, B. S. & STOKES, S. L.: "Repetitive testing in the presence of inspection errors", *Technometrics*, 37(1), pp. 102-111, 1995.

GABA, A. & WINKLER, R. L.: "Implications of errors in survey data: a bayesian model". *Management Science*, 38(7), pp.913-25, 1992.

JOHNSON, N. L., KOTZ, S.; & WU, X. "Inspection errors for attributes in quality control", London, Chapman &Hall, 1991.

7 ANEXO 1



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	p=	0,95		83	limitante			
2	e1=	0,1		83	teto do limitante			
3	e2=	0,1						
4	n=	1000		6000	esperança de custo total sem inspeção			
5	c0=	1		5296	esperança de custo total com inspeção mínimo			
6	c1=	80		**5296**	**esperaça de custo total mínimo**			
7	c2=	120						
8								
9			m	n.m.c0	n.p.B[m;(1-e1);0,5m].c1	n.(1-p).(1-B[m;e2;0,5m]).c2	custo total	
10			1	1000	7.600	600	9200	
11			2	2000	14.440	60	16500	
12			3	3000	2.128	168	5296	
13			4	4000	3.975	22	7997	
14			5	5000	651	51	5702	
15			6	6000	1.205	8	7212	
16			7	7000	207	16	7224	
17			8	8000	382	3	8384	
18			9	9000	68	5	9073	
19			10	10000	124	1	10125	

figura 4: Planilha Excel para determinação do *m* ótimo

8 ANEXO 2

Utilize um editor de texto para escrever os arquivo cr.mac. Salve-o, em formato ascii (texto), no diretório mtbwin. Entre no *software* Minitab. Execute o comando *%cr.* Siga as instruções que aparecerem na tela.

Linhas de Comando	Explicação
gmacro cr	Ativa o modo de programação de macros
note Entre, apertando enter apos cada entrada, note o Custo c0, c1, c2, p, (1-e1), (1-e2) e n read 'terminal'c100; nobs 7. end let k1= c100(1) let k2= c100(2) let k3= c100(3) let k4= c100(4) let k5= c100(5) let k6= c100(6) let k6=1-k6 let k7= c100(7)	Entrada dos seguintes valores: • c_0 → o custo de classificar um produto uma única vez. • c_1 → custo de erroneamente julgar um produto conforme como não-conforme • c_2 → custo de julgar erroneamente um produto não-conforme como conforme. • p→proporção de produtos fabricados confomes. • $(1-e_1)$ → probabilidade de classificar um produto conforme como conforme. • $(1-e_2)$ → probabilidade de classificar um produto não-conforme como não-conforme. • n → número de produtos fabricados.
let k8=((k4*k2+(1-k4)*k3)/k1)+0.5 round k8 k8	Calcula o limitante para m^*.
do k9=1:k8 let k10=k9/2 cdf k10 k11;	

bino k9 k5. cdf k10 k12; bino k9 k6. Let k12=1-k12 let c1(k9)=k11 let c2(k9)=k12 enddo set c3 1:k8 end let c4=k7*c3*k1+k7*k4*c1*k2+k7*(1-k4)*c2*k3 let k11=k7*(1-k4)*k3	Calcula os valores de E_m , $\mathrm{m} \geq 0$.
stack 0 c3 c3 stack k11 c4 c4 sort c3 c5; by c4. note O valor de m otimo e: let k12=c5(1) print k12 note O custo total esperado ser : min c4 endmacro	Calcula o valor de m° e o custo correspondente.

Figura 5: Programa Minitab para determinação do *m* ótimo

Sobre a Verax Consultoria

A Verax é uma empresa de consultoria especializada em gestão. Temos uma ampla gama de experiências e competências como pode ser consultado em www.veraxc.com/areas.htm. Os líderes da empresa já proveram serviços de consultoria para mais de 60 organizações de diferentes segmentos e tamanhos, em mais de 150 projetos.

Informações adicionais

Para informações adicionais você pode nos contatar em contato@veraxc.com ou visite nosso sítio de internet em www.veraxc.com.

Autoria e publicação

Roberto Quinino, Emerson Colin e Pedro Bueno são os autores do documento. Emerson é sócio da Verax Consultoria.

O documento foi publicado originalmente na Gestão e Produção.

Verax consultoria

Tel: +55-11-3266-7000

Rua Pamplona, 1018 – cj 51 – Jardim Paulista
01405-001 – São Paulo – SP, Brasil